Tentamen Discrete Structuren

RuG-Informatica

donderdag 15 april 2010, 9.00 – 12.00 uur

Degenen die de DS-toets gehaald hebben (met een cijfer 5.5 of hoger), mogen opgaven 1, 2, 3 overslaan. Bij hen telt dan voor die opgaven bij elkaar het toetscijfer, zij het dan wel vertaald naar het gewicht dat die opgaven hier bij elkaar hebben. Wie de toets gehaald hebben, mogen er echter ook voor kiezen alle opgaven te doen, met dan de mogelijkheid om bij opgaven 1, 2, 3 hoger te scoren dan wat het toetscijfer daar biedt; het maximum telt.

Degenen die de toets niet gehaald hebben, moeten sowieso alle opgaven doen.

Voor de zes opgaven zijn respectievelijk maximaal te halen: 20, 10, 15, 18, 13, 14 ounten. Het cijfer wordt: het totale aantal behaalde punten plus 10, gedeeld door 10. Per onderdeel staat het maximale aantal punten direkt achter het nummer ervan vermeld, tussen rechte haken. *(Die informatie is enigszins onder voorbehoud, indachtig het algehele webevinden.)*

De antwoorden op de opgaven en hun onderdelen moeten helder onderbouwd zijn. Bij de uitwerking van een onderdeel mag echter vrijelijk gebuik gemaakt worden van een resultaat dat eventueel al vermeld staat in een eerder onderdeel, ook als dat eerdere onderdeel niet, of slechts deels, gemaakt is.

De uitwerking moet duidelijk en met blauwe of zwarte pen opgeschreven worden; niet met rode pen en niet met potlood. Elk in te leveren vel moet voorzien zijn van naam en studentnummer (en ook nog, voor de helderheid, van een volgnummer van het vel, met op het eerste vel tevens een vermelding van het totale aantal vellen). *Succes toegewenst!*

Opgave 1.

(i) [6] Bewijs dat altijd het volgende geldt voor verzamelingen A, B, C:
$(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$.

(ii) [8] Bewijs met inductie dat, nog algemener, het volgende geldt voor alle natuurlijke getallen n. Als $A_1, \ldots, A_n$ een rij van n verzamelingen is en C een verzameling is, dan
$(\bigcup\{A_i \mid 1 \leq i \leq n\}) - C = \bigcup\{A_i - C \mid 1 \leq i \leq n\}$.

Hierbij is, algemeen voor een collectie K van verzamelingen, $\bigcup K$ de collectieve vereniging van de verzamelingen in K; d.w.z.: $\bigcup K$ is de verzameling van alle ovjecten die tot minstens één van de verzamelingen in K behoren. (Voorbeeld: $\bigcup\{A, B\} = A \cup B$.)

Aanwijzing. Noteer voor het gemak:
$U_n = \bigcup\{A_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ en $V_n = \bigcup\{A_i - C \mid i \leq i \leq n\}$.

(iii) [6] Is de volgende bewering waar voor elk willekeurig stel verzamelingen A, B, C?
$C - (A \cup B) = (C - A) \cup (C - B)$.

Geef in geval van antwoord "ja" een algemeen bewijs en in geval van antwoord "nee" een concreet tegenvoorbeeld.

Opgave 2.

(i) [5] Zij f een functie van een verzameling X naar een verzameling Y. Bewijs dat de volgende relatie R op X een equivalentierelatie is. Voor alle $x, y \in X$:

$x\,R\,y$ precies dan als $f(x) = f(y)$.

(ii) [2] Stel: f en R zijn als in (i) boven. Beschrijf de equivalentieklassen van R inzichtelijk onder verwijzing naar f (en verder niet meer naar R).

(iii) [3] Definiëer als volgt een relatie R op $\mathbb{N}$. Voor alle $x, y \in \mathbb{N}$:

$x\,R\,y$ precies dan als x en y dezelfde veelvouden hebben.

Bewijs dat R een equivalentierelatie is en geef een inzichtelijke beschrijving van de equivalentieklassen.

Opgave 3. Veronderstel: G en H zijn grafen (voluit gezegd: gerichte grafen), $G = (V, R)$, $H = (W, S)$.

(i) [3] Wat betekent de uitspraak "G en H zijn isomorf" precies?

(ii) [3] Veronderstel: R is symmetrisch. Waar komt dan, kort gezegd, de uitspraak "G is samenhangend" op neer?

(iii) [5] Veronderstel: G en H zijn isomorf en R is symmetrisch en G is samenhangend. Toon aan dat H dan ook samenhangend is.

(iv) [4] Stel: t is een knoop van G. Wanneer heet G een *boom met top t*?

Opgave 4

(i) [3] Veronderstel: R is een relatie op verzameling X en R is transitief en irreflexief. Toon aan: R is anti-symmetrisch.

(ii) [2] Zij R als in (i) en zij S de reflexieve afsluiting (op X) van R. Toon aan: S is een partiële ordening van X.

(iii) [3] Zij (X, S) een willekeurige poset. Zij Y een deelverzameling van X. Wat is on dit verband een *bovengrens* van Y, en wat een *supremum* van Y?

(iv) [2] Wanneer heet een poset (X, S) in het bijzonder een *tralie*?

(v) [2] Wanneer heet een eindige poset (X, S) in het bijzonder en *Boolse algebra*? Wat is er dan te zeggen over het aantal elementen van X?

(v) [3] Op grond van welke eigenschappen mag de bekende relatie $\leq$ op $\mathbb{N}$ een *lieaire ordening* genoemd worden? En op grond van welke bovendien een *welordening*?

(vi) [3] Is de inverse van een lineaire ordening altijd weer een lineaire ordening? En de inverse van een welordening altijd weer een welordening? (Beargumenteer. In elk van beide gevallen met een algemeen bewijs of met een concreet tegenvoorbeeld.)

2

Opgave 5. Veronderstel: X is een verzameling en F is een functie van $X \times X$ naar X. (Met andere woorden: F is een *2-plaatsige bewerking* op X of, met nog andere woorden, een *binaire bewerking* op X. Laat B een deelverzameling van X zijn.

Definiëer voor elke willekeurige deelverzameling Y van X: Y is (B, F)*-gesloten* als Y aan de volgende twee condities voldoet: (1) B is een deelverzameling van Y en (2) voor alle $x, y \in Y$ geldt, dat ook $F(x, y) \in Y$. (De tweede eigenschap wordt in de praktijk ook wel verwoord als: "Y is gesloten onder F". Voorbeeld: een deelverzameling Y van $\mathbb{N}$ is gesloten onder optelling als voor alle $x, y \in Y$ ook $x + y \in Y$.)

Gemakshalve zeggen we verder kortweg "gesloten" in plaats van "(B, F)-gesloten".

(i) [3] Veronderstel: Y en Z zijn gesloten deelverzamelingen van X. Toon aan: de doorsnede $Y \cap Z$ is ook weer gesloten.

(ii) [3] Veronderstel, algemener: K is een niet-lege collectie van gesloten deelverzamelinhgen van X. Toon aan: de collectieve doorsnede $\bigcap K$ is ook weer gesloten. (Per definitie bestaat $\bigcap K$ uit alle objecten die in elke verzameling $Y \in K$ zitten. Voorbeeld: als $K = \{Y, Z\}$, dan $\bigcap K = Y \cap Z$.)

(iii) [3] Welke *regelverzameling* Φ (in de zin van de theorie van inductieve definities) hoort bij het hier gebruikte begrip "gesloten"? (B treedt sowieso op als *basisverzameling* in de zin van die theorie.)

(iv) [2] Toon aan dat er een kleinste gesloten deelverzameling van X is.

(v) [2] Bewijs nu heel kort, dat er een kleinste deelverzameling D van N^+ (de verzameling van de positieve natuurlijke getallen) is die 2 en 7 bevat en die met elk tweetal elementen x, y ervan ook de macht x^y bevat.

Opgave 6. Zij Σ een of ander (eindig en niet-leeg) alfabet. Zij Σ^* als gebukelijk, dus: de verzameling van alle woorden over Σ. De volgende twee eigenschappen (a) en (b) van Σ^* mogen zonder bewijs gebruikt worden:

(a) Σ^* is inductief te karakteriseren door het volgende tweetal geslotenheidseigenschappen:

(a1) Σ^* bevat het lege woord ε.

(a2) Als $v \in \Sigma^*$ en $a \in \Sigma$, dan bevat Σ^* ook de concatenatie va.

(b) Voor elke $w \in \Sigma^*$ geldt: hetzij $w = \varepsilon$, hetzij $w = va$ voor zekere $v \in \Sigma^*$ en $a \in \Sigma$. In het laatste geval zjn die v en die a uniek bepaald bij w.

Nu gelijk het eerste onderdeel van deze opgave.

(i) [2] Uit (a) volgt dat bij Σ^* een bepaald inductieprincipe hoort. Formuleer dit principe, en wel in de vorm van de condities voor een gegeven $Z \subseteq \Sigma^*$ die te controleren zijn in een inductiebewijs (van het hier bedoelde soort), dat $Z = \Sigma^*$.

We beschouwen nu multi-grafen met labels uit Σ of met labels uit Σ^*. Zo'n multi-graaf is dus een paar (V, R) met V een verzameling knopen en met R een deelverzameling van $V \times \Sigma \times V$ of een deelverzameling van $V \times \Sigma^* \times V$. Voor ons doel is het verder geschikter om, algemeen, een multi-graaf $G = (V, R)$ met labelverzameling L te presenteren als een paar (V, F) met F als volgt. F is een functie met domein L met voor elke $a \in L$:

$$F(a) = \{(p, q) \in V \times V \mid (p, a, q) \in R\}$$

(de binnen G door a bpaalde realati op V).

Beschouw nu een multi-graaf $G = (V, F)$ met labelverxameling Σ. Met G willen we laten corresponderen: een bepaalde multi-graaf $H = (V, G)$ met labelverzameling Σ^*. Het idee is: er is in H precies dan een w-pijl van p naar q als er in G een w-pad is van p naar q. (Hierbij $p, q \in V$ en $w \in \Sigma^*$.) De volgende recursieve definitie van de functie G zal in overeenstemming blijken met dit idee.

$G(\varepsilon) = \{(p, p) \mid p \in V \ (= I_V)$.

$G(va) = F(a) \circ G(v)$ voor alle $a \in \Sigma$ en alle $v \in \Sigma^*$. (Hierbij is $\circ$ de compositie-operatie op relaties.) Deze definitie is inderdaad correct als recursieve definitie (in de zin van de laatste DS-handout), want (b) hiervoor garandeert ondubbelzinnigheid, en verder zijn de rechterleden zinnig opgebouwd.

(ii) [3] Eerst nog wat meer, in het algemeen, over de gebruikte compositie-operatie $\circ$.

(a) Geef nog even expliciet: de definitie van $S \circ R$ voor willekeurige relaties R, S. Werk deze definitie ook nog concreet uit voor het volgende relaties R en S op $\mathbb{N}$: $R = \{(2,3), (5,7), (5,9)\}$, $S = \{(3,4), (3,7), (9,1), (11,3)\}$. (Maak eventueel een diagram ter verduidelijking.)

(b) Definiëer voor elke verzamelimg X de relatie I_X op X door: $I_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$. Toon aan dat dan voor elke relatie R op X: $R \circ I_X = R = I_X \circ R$.

(c De operatie $\circ$ is *associatief.* Wat houdt dit precies in)? (Een bwijs wordt hier niet gevraagd.)

(iii) [2] Nu weer terug naar de recursieve definitie van G. Uit de aard van die definitie volgt in eerste instanbtie: het domein van G is een deelverzameling van Σ^* en de waarden van G zijn relaties op V. Bewijs inductief dat G in feite totaal is op Σ^*; d.w.z.; het domein van G is gelijk aan de hele Σ^*. (Vergelijk (i) voor de inductie.)

(iv) [2] Bewijs dat voor elke $a \in \Sigma$: $G(a) = F(a)$. G is dus een uitbreiding van F.

(v) [3] Bewijs — en wel opnieuw inductief —, dat voor alle $w \in \Sigma^*$ het volgende geldt:
$G(vw) = G(w) \circ G(v)$ (voor elke $v \in \Sigma^*$).
(Vergelijk opnieuw (i) voor de inductie.)

Commentaar. Al met al mag nu geconcludeerd worden dat de definitie van H inderdaad in overeenstemming is met het eerdere idee met betrekking tot H.

(v) [2] Zij G nog steeds als boven. Laat $q_0 \in V$ en laat $E \subseteq V$. Dan vormt, zoals bekend, het stel G, q_0, F een *eindige automaat.* (Terminologie in dit verband: p is de *statttoestand* en de elementen van E zijn de *accepterende toestanden.*) Laat L de taal zijn die door deze automaat geaccepteerd wordt. Geef met behulp van H als boven (in het bijzonder met behup van G eruit) een compacte uitdrukking voor L. (Geef om te beginnen de gebruikelijk definitie van L in grafentaal onder verwijzing nar G, q_0 en E.)

4